L.B. Monastir	Devoir de contrôle $n:2$	$3^{ème}$ *Math*
P.P. : Ali Zouhaier	Durée : 2 heures	**2013 / 2014**

⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ **EXRCICE 1** ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ (7 points)

Soit la fonction $f : x \mapsto (x-1)\sqrt{1-x^2}$ pour $x \in [-1;1]$

C_f est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé R.

1/ Etudier la dérivabilité de *f* à droite en -1 et interpreter géometriquement le résultat.

2/ Etudier la dérivabilité de *f* à gauche en 1 et interpréter géométriquement le résultat.

3//**a**) Montrer que $\forall x \in]-1;1[;\ f'(x) = -\dfrac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}$

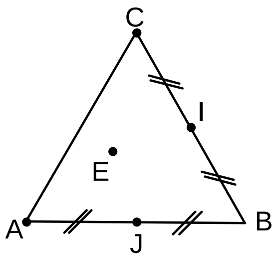
b) Dresser le tableau de variation de *f*.

4/ Soit la fonction g : $x \mapsto -x^4+2x^3-2x+1$; *pour* $x \in [-1;1]$

a) Vérifier que $g(x) = [f(x)]^2$.

b) Déterminer la valeur minimale de g.

⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ **EXRCICE 2** ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ (6,5 points)



Soit ABC un triangle équilatéral direct.
Désignons par I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AB]$.

1/**a**- Prouver qu'il existe une seule rotation R qui transforme C en A et I en J.

b- Prouver que B est le centre de R et $\frac{\pi}{3}$ son angle.

2/ Soit E un point quelconque du plan P.

a) Construire F l'image de E par R=$r_{\left(B;\frac{\pi}{3}\right)}$.

b) Montrer que $r_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}(F) = B$.

3/ Soit G le point tel que $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB}$; G'= $r_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}(G)$ et $\Delta' = r_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}((FG))$

a) Montrer que $\overrightarrow{BG'}$ est un vecteur directeur de Δ'.

b) Calculer $\widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BG'}\right)}$ en déduire le traçage de Δ'.

⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ **EXRCICE 3** ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ (6,5 points)

Soient a, b et c trois réels vérifiant :

$$\begin{cases} a+b+c = \pi & (1) \\ a \in]0,\frac{\pi}{2}[\text{ et } \tan(a) = \frac{1}{2} & (2) \\ \sin(b).\sin(c) = \frac{1}{2\sqrt{5}} & (3) \end{cases}$$

1/ Calculer $\cos a$ et $\cos(b+c)$ puis déduire $\cos b.\cos c$ et $\tan(b).\tan(c)$.

2/ vérifier que $\tan(b+c) = \dfrac{\tan(b)+\tan(c)}{1-\tan(b).\tan(c)}$ puis déduire $\tan(b)+\tan(c)$.

3/ Calculer alors $\tan(b)$ et $\tan(c)$.

BON TRAVAIL

EXRCICE 1 (7 points)

1/ ▸ $\lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{-(x-1)^2(1+x)}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = \lim\limits_{x\to(-1)^+} \dfrac{-(x-1)^2}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en -1.

C_f admet une demi tangente verticale en son point d'abscisse (-1).

2/ ▸ $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{(x-1)\sqrt{1-x^2}}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to1^+} \sqrt{1-x^2} = 0.$

Donc f est dérivable à gauche en 1.

C_f admet une demi tangente horizontale en son point d'abscisse 1.

3//a) $\forall x \in \,]-1;1[;\ f'(x) = (x-1)'\sqrt{1-x^2} + \left(\sqrt{1-x^2}\right)'(x-1)$

$$= \sqrt{1-x^2} + \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}(x-1)$$

$$= \frac{1-x^2-x(x-1)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= -\frac{2x^2-x-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) $2x^2-x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = \dfrac{-1}{2}$

D'où le tableau de variation de f

x	-1	$\frac{-1}{2}$	1
f'(x)	+		− 0
f(x)	0 ↗	$\frac{-3\sqrt{3}}{4}$	↘ 0

4/a) $\left[f(x)\right]^2 = \left[(x-1)\sqrt{1-x^2}\right]^2 = -x^4+2x^3-2x+1 = g(x).$

b) g est dérivable sur $[-1;1]$ (coincide avec un polynome)

$\forall x \in \,]-1;1[;\ g'(x) = 2f'(x)f(x)$

comme $\forall x \in \,]-1;1[;\ f(x) = (x-1)\sqrt{1-x^2} < 0$ alors le signe de g'(x) est celui de $[-f'(x)]$. D'où le tableau de variation de g

x	-1	$\frac{-1}{2}$	1
g'(x)	0 −		+ 0
g(x)	0 ↘	$\frac{27}{16}$	↗ 0

Donc la valeur minimale de g est $\dfrac{27}{16}$.

EXRCICE 2

1/a) $CI = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}AB = AJ \neq 0$ de plus $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{AJ}$,ne sont pas colinéaires

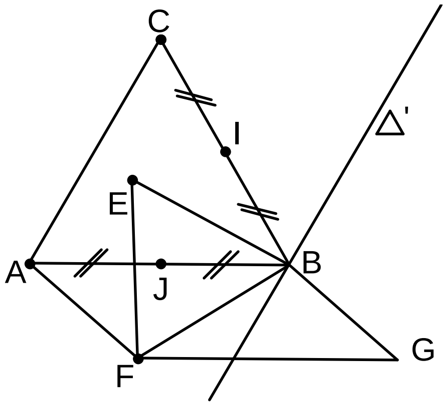
Donc il existe une seule rotation R qui transforme C en A et I en J.

b) $I = C * B$ donc $R(I) = R(C) * R(B) \Leftrightarrow J = A * R(B)$

Or $J = A * B$ donc $R(B) = B$ alors B est le centre de R.

. $R(C) = A$ donc l'angle de R est $\widehat{\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BA}\right)} \equiv \dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

2/a)



b) $F = r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}(E) \Leftrightarrow \begin{cases} BF=BE \\ \widehat{\left(\overrightarrow{BE};\overrightarrow{BF}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ BEF est un triangle équilatéral direct

$\Leftrightarrow \begin{cases} EF=EB \\ \widehat{\left(\overrightarrow{EF};\overrightarrow{EB}\right)} \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow r_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}(F) = B.$

3/a) $r_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}(F) = B$ et G'= $r_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}(G)$ donc B et G' sont deux points distincts dans $\Delta' = r_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}((FG))$ alors $\overrightarrow{BG'}$ est un vecteur directeur de Δ'.

b) $\widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BG'}\right)} \equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{FG}\right)} + \widehat{\left(\overrightarrow{FG};\overrightarrow{BG'}\right)} \quad [2\pi]$

$\equiv \widehat{\left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)} + \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$ car $r_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}(F)=B$ et G'=$r_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}(G)$

$\equiv -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$

$\equiv 0 \quad [2\pi]$

Par suite $\Delta' = (BG')$ est la parallèle à (AC) passant par B.

⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ **EXRCICE 3** ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞ ⊞

1/ $1+\tan^2(a) = \frac{1}{\cos^2(a)} \Leftrightarrow \cos(a) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(a)}}$ car $a \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$\Leftrightarrow \cos(a) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$

. $\cos(b+c) = \cos(\pi - a)$ car $a+b+c = \pi$

$=- \cos(a) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$

. $\cos(b+c) = \cos(b)\cos(c) - \sin(b)\sin(c)$

$\Leftrightarrow \cos(b)\cos(c) = \cos(b+c) + \sin(b)\sin(c)$

$= -\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}}$

$= -\frac{3}{10}\sqrt{5}.$

. $\tan(b).\tan(c) = \frac{\sin(b)}{\cos(b)}\frac{\sin(c)}{\cos(c)} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{4}.$

2/ $\frac{\tan(b)+\tan(c)}{1-\tan(b).\tan(c)} = \frac{\frac{\sin(b)}{\cos(b)} + \frac{\sin(c)}{\cos(c)}}{1 - \frac{\sin(b)}{\cos(b)}\frac{\sin(c)}{\cos(c)}} = \frac{\frac{\sin(b)\cos(c)+\sin(c)\cos(b)}{\cos(b)\cos(c)}}{\frac{\cos(b)\cos(c)-\sin(b)\sin(c)}{\cos(b)\cos(c)}}$

$$= \frac{\sin(b+c)}{\cos(b+c)} = \tan(b+c).$$

$. \tan(b+c) = \tan(\pi - a) = \dfrac{\sin(\pi - a)}{\cos(\pi - a)} = \dfrac{\sin a}{-\cos(a)} = -\tan(a) = -\dfrac{1}{2}.$

par suite $\dfrac{\tan(b)+\tan(c)}{1-\tan(b).\tan(c)} = -\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \tan(b)+\tan(c) = -\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{4}\right] = -\frac{5}{8}$$

3/ $\tan(b)+\tan(c) = -\dfrac{5}{8} \Leftrightarrow \tan(b) = -\dfrac{5}{8} - \tan(c).$

D'autre part $\tan(b).\tan(c) = -\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \left(-\dfrac{5}{8} - \tan(c)\right)\tan(c) = -\dfrac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \tan^2(c) + \frac{5}{8}\tan(c) - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\tan^2(c) + 5\tan(c) - 2 = 0$$

$$(\Delta = 5^2 - 4(-2)\times 8 = 89)$$

$$\Leftrightarrow \tan(c) = \frac{-5-\sqrt{89}}{16} \text{ ou } \tan(c) = \frac{-5+\sqrt{89}}{16}$$

Pour $\tan(c) = \dfrac{-5-\sqrt{89}}{16}$ on a $\tan(b) = -\dfrac{5}{8} - \dfrac{-5-\sqrt{89}}{16} = \dfrac{-5+\sqrt{89}}{16}.$

Pour $\tan(c) = \dfrac{-5+\sqrt{89}}{16}$ on a $\tan(b) = \dfrac{-5-\sqrt{89}}{16}.$